Liebe EF – ler,

letzte Stunde haben wir graphisch über Hoch- und Tiefpunkte gesprochen und dabei zwei Eigenschaften herausgearbeitet.

1. **Eigenschaft:**

Dabei haben wir festgestellt, dass alle Hoch- und Tiefpunkte, ebenso wie die Sattelpunkte (das war das mit der schicken Pferdezeichnung) eine waagerechte Tangente haben. Anders ausgedrückt, für all diese Punkte gilt, dass die Steigung Null ist.

Mit Variablen ausgedrückt: Für alle Stellen x_H der Hochpunkte, alle Stellen x_T der Tiefpunkte und alle Stellen x_S der Sattelpunkte gilt: Die Ableitung ist an dieser Stelle gleich Null.

$f'(x_H) = 0$ $f'(x_T) = 0$ $f'(x_S) = 0$

2. **Eigenschaft**

Weiterhin haben wir festgestellt, dass sich die einzelnen Stellen im Verhalten um diese Stelle herum unterscheiden.

Bei einem Hochpunkt wechselt das Vorzeichen der Ableitung von plus nach minus, bzw. ist die Steigung der Ableitung, also die Ableitung der Ableitung, also $f''(x_H)$ negativ.

Bei einem Tiefpunkt wechselt das Vorzeichen der Ableitung von minus nach plus, bzw. ist die Steigung der Ableitung, also die Ableitung der Ableitung, also $f''(x_T)$ positiv.

Bei einem Sattelpunkt wechselt das Vorzeichen der Ableitung nicht. Die Ableitung hat an der Stelle des Sattelpunktes einen Hoch- oder einen Tiefpunkt.

Kommentiert [Elke Abt1]:

Das ist das, was zusammengefasst in der letzten Stunde bereits besprochen wurde.

Wie lässt sich mit diesen Eigenschaften ein Hoch- bzw. ein Tiefpunkt berechnen / rechnerisch ermitteln bzw. bestimmen?

Die 1. Eigenschaft ist die quasi die Grundvoraussetzung für einen Hoch- bzw. Tiefpunkt. Man nennt diese Eigenschaft „notwendige Bedingung“ abgekürzt: „notw. Bed.“.

Wenn die erste Eigenschaft erfüllt ist, lohnt es sich näher hinzusehen. Ist die zweite Eigenschaft gleichzeitig mit der ersten Eigenschaft erfüllt, dann hat man die Bestätigung, dass es sich um einen Hoch- bzw. Tiefpunkt handelt.* Man nennt die Kombination aus der ersten und zweiten Eigenschaft „hinreichende Bedingung“, abgekürzt: „hinr.Bed.“.

Wird nach einem Punkt gefragt, muss der y-Wert des Punktes auch noch berechnet werden.

Diesen mathematischen Inhalt findet ihr auch auf Seite 91 und auf Seite 92 oben (bis Beispiel 1). Meine Empfehlung: Lest den Text dazu und prüft, ob ihr bis hierhin Fragen habt. Notiert diese ggfs. Auf einem Blatt.

Ich werde nun eine Beispielaufgabe vorrechnen und dabei die Notation deutlich machen. (Alle Gedankenblasen sind nur für Euch zum Verständnis da und gehören – wie immer – nicht zu einer Lösungsdarstellung. (Im Buch findet ihr ebenfalls Beispiele. Auf Seite 92 1a) entspricht der typischen Vorgehensweise.

Ich werde hier ebenfalls zur typischen Vorgehensweise jeweils ein Beispiel darstellen.

VZW: Vorzeichenwechsel

1. **Beispiel (mit der hinr.Bed.: f´(x) = 0 und f´(x) hat ein VZW an der Stelle x)**

Das Buch lässt gern die Indizes weg. Darum passe ich mich hier an

Seite 93, Aufgabe 2)h)

f(x) = $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

$\frac{1}{4} \cdot 4\,x^{4-1} - \frac{2}{3} \cdot 3\,x^{3-1} - \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1}$

f´(x) = $x^3 - 2x^2 - 3x$

Hoch-, Tief- und Sattelpunkte:

Notw.Bed.: f´(x) = 0

$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

x (x^2 – 2x – 3) = 0

x = 0 oder x^2 – 2x – 3 = 0

x = 0 oder $x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$

x = 0 oder x = 3 oder x = −1

Die einzigen Stellen, an denen ein Hochpunkt, ein Tiefpunkt oder ein Sattelpunkt vorliegen kann, sind x = 0, x = 3, x = −1

- Das lässt sich beweisen. Ich halte das anschaulich für klar und habe nicht vor, den Beweis mit euch zu besprechen oder ihn einzufordern.

hinr.Bed. für Extrema: $f'(x) = 0$ und VZW. an dieser Stelle

Die Untersuchung des VZW zeigt man durch eine Tabelle:
Die sieht komplizierter aus als sie ist

Das steht im Buch mathematischer

Das sind die drei Stellen aus der notwendigen Bedingung

, sucht euch aus, was euch besser gefällt

links von -1 | zwischen -1 und 0 | zwischen 0 und 3 | rechts von 3

betrachtete Stellen allgemein	X<-1	X=-1	-1 < x < 0	X = 0	0<x<3	X=3	x>3
Beispielstelle	-3	-1	-0,5	0	1	3	4
Ableitung an der Beispielstelle	-36	0	$+\frac{7}{8}$	0	-4	0	20
Prinzipielle Steigung bei den betrachteten Stellen	↘	→	↗	→	↘	→	↗

** ***

T.P. H.P. T.P.

** -3 ist links von -1 ** 4 ist rechts von 3

*** Erinnerung: $f'(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

$f'(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 - 3\cdot(-3) = -36$

$f'(4) = 4^3 - 2\cdot 4^2 - 3\cdot 4 = 20$

Die Tabelle zeigt, dass an der Stelle x = -1 ein Tiefpunkt (T.P.), an der Stelle x = 0 ein Hochpunkt und an der Stelle x = 3 wiederum ein Tiefpunkt vorliegt.

TP_1(-1/ …),   HP (0/ …)   und TP_2 (3 / …)

Nun müssen noch die zugehörigen y - Werte bei den Hoch- und Tiefpunkten bestimmt werden:

Da es der y-Wert ist und nicht die Steigung, nutzen wir: f(x) = $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

Und setzen dort die x-Werte ein, die wir bei der ersten Eigenschaft ausgerechnet hatten.

f(-1) = $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = \frac{3+8-18}{12} = -\frac{7}{12}$ $\longrightarrow$ $TP_1\left(-1 \mid -\frac{7}{12}\right)$

f(0) = 0 $\longrightarrow$ $HP(0 \mid 0)$

f(3) = $\frac{1}{4} \cdot 3^4 - \frac{2}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 = \frac{81}{4} - \frac{54}{3} - \frac{27}{2} = \frac{243-216-162}{12} = \frac{135}{12} = \frac{45}{4} = 11,25$

$\longrightarrow$ TP_2 (3 | 11,25)

2. Beispiel (mit der hinr. Bed.: f´(x) = 0 und f´´ $(x) \neq 0$

Seite 93, Aufgabe 2)g)

$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4$

$f'(x) = -x^3 + 3x^2$

$f''(x) = -3x^2 + 6x$

Wiederum sind dies die interessanten Stellen

Notw. Bed. : f´(x) = 0

$-x^3 + 3x^2 = 0$

$-x^2 (x - 3) = 0$

$-x^2 = 0$ oder $x - 3 = 0$

$x = 0$ oder $x = 3$

hinr. Bed. : f´(x) = 0 und f´´(x) $\neq$ 0

f´´(0) = 0 ⟶ keine Aussage möglich.

Gedanken:

hier wechselt man zum VZW – Kriterium, also zur ersten Methode vom 1. Beispiel:

Stellen	x < 0	x = 0	x zwischen 0 und 3
Bsp.stelle	-1	0	1
Ableitung an der Bsp.stelle	4	0	2
Steigung bei den Stellen	steigt	0	steigt

$SP(0 / \ldots)$

f´´(3) = $-3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 = -9$ ⟶ HP (3 / ....)

Da die Steigung der Ableitung negativ ist, fällt der Graph der Ableitung und daher gibt es einen Hochpunkt an der Stelle x = 3

Und wiederum die y-Koordinate:

f(0) = - 4 $\longrightarrow$ SP (0 / - 4)

f(3) = $-\frac{1}{4} \cdot 3^4 + 3^3 - 4 = -\frac{81}{4} + 27 - 4 = 2\frac{3}{4}$ $\longrightarrow$ HP (3 / 2$\frac{3}{4}$)

OK, nun seid ihr dran mit rechnen ….

STOPP!!!! Erst verstehen und Fragen – möglichst untereinander - klären, zur Not mit mir, dann selbst loslegen.

Hinweis:

Prüft euch selbst, indem ihr den Graphen von f(x) zeichnen lasst und die Hoch- und Tiefpunkte, als auch Sattelpunkte ablest.

Eure Aufgabe: S. 93 die restlichen Teile von 2)

(a)-c) ist einfach, i) Beachte die binomische Formel! Tipp: Zeichne Den Graphen von f und nachdem die aufgelöst hast ebenfalls. Dann sollte der Graph übereinstimmen.)